МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на третий курс

1. ③ Найти решение задачи Коши

$$y''(x) - y(x) = e^{-x}, \quad x > 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

2. ⑤ Найти поток векторного поля $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, x^2)$ через внешнюю поверхность части сферы

$$S = \left\{ \, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ \ z > 0 \, \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

3. ⑥ Найти экстремали функционала

$$J(y) = \int\limits_1^3 \Big(x^2 \big(y'(x) \big)^2 + 6 \big(y(x) \big)^2 \Big) \, dx, \quad y(1) = 3, \quad y(3) = \frac{1}{9},$$

и исследовать их на экстремум.

4. ⑤ Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)} \, dx$$

5. ⑥ Доказать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

является непрерывно дифференцируемой по $x \in \mathbb{R}$, и вычислить интегралы

$$I_0 = \int\limits_0^{2\pi} \big(f(x) \big)^2 \, dx, \quad I_1 = \int\limits_0^{2\pi} \big(f'(x) \big)^2 \, dx.$$

ОТВЕТЫ

для поступающих на третий курс

1. ③ Найти решение задачи Коши

$$y''(x) - y(x) = e^{-x}, \quad x > 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Ответ: $y(x) = \frac{\operatorname{sh} x - xe^{-x}}{2}$.

Инструкция: общее решение однородного уравнения — 1 очко, частное решение неоднородного уравнения — 1 очко.

2. ⑤ Найти поток векторного поля $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, x^2)$ через внешнюю поверхность части сферы

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z > 0 \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: по определению $\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \, \cos \theta \, d\theta = \frac{\pi}{4}$, или по теореме Гаусса, т. к. дивергенция $\vec{F}$ равна нулю, то поток $\vec{F}$ через S равен потоку через поверхность $\{x^2 + y^2 < 1, \ z = 0\}$, ориентированную нормалью $(0, 0, 1)$, то есть $\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{\pi}{4}$.

Инструкция: при решении по определению — поток представлен повторным интегралом в терминах какой-либо параметризации поверхности — 2 очка, при решении по теореме Гаусса — поток через S отождествлён с потоком через круг $x^2 + y^2 < 1$ и $z = 0$ — 1 очко, поток через круг записан в виде повторного интеграла — 2 очка.

3. ⑥ Найти экстремали функционала

$$J(y) = \int\limits_1^3 \left(x^2 \left(y'(x) \right)^2 + 6 \left(y(x) \right)^2 \right) dx, \quad y(1) = 3, \quad y(3) = \frac{1}{9},$$

и исследовать их на экстремум.

Ответ: $y_*(x) = \frac{3}{x^3}$ — минимум. Уравнение Эйлера $x^2 y'' + 2xy' - 6y - 0$, общее решение $y = Ax^2 + \frac{B}{x^3}$, из граничных условий $A + B = 3$, $9A + \frac{B}{27} = \frac{1}{9}$, откуда

$A = 0$, $B = 3$. Для нетривиальной $h \in C_0^1[1,3]$ имеем

$$J(y_* + h) - J(y_*) = \int\limits_1^3 \left(x^2 \left(h'(x)\right)^2 + 6\left(\left(h(x)\right)^2\right) dx > 0.$$

Инструкция: записано уравнение Эйлера для данной задачи — 1 очко, найдено его общее решение — 2 очка, найдена допустимая экстремаль — 1 очко, исследован экстремум — 2 очка.

4.⑤ Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)}\, dx$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$. Рассмотрим $I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x(1+x^2)}\, dx$ для $y \geq 0$. Тогда $I(0) = 0$, и для $y > 0$ имеем

$$I'(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{(1+x^2)}\, dx,$$

отсюда $I'(0) = \frac{\pi}{2}$, и при $y > 0$ получаем

$$I''(y) = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin(xy)}{(1+x^2)}\, dx = I(y) - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x}\, dx = I(y) - \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, получаем задачу Коши $I''(y) - I(y) = -\frac{\pi}{2}$, $I(0) = 0$, $I'(0) = \frac{\pi}{2}$, откуда $I(y) = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-y}\right)$, и $I(1) = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$ — искомый интеграл.

Инструкция: введена в рассмотрение функция $I(y)$ — 1 очко, для $I(y)$ получена задача Коши — 2 очка.

5.⑥ Доказать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

является непрерывно дифференцируемой по $x \in \mathbb{R}$, и вычислить интегралы

$$I_0 = \int\limits_0^{2\pi} \left(f(x)\right)^2 dx, \quad I_1 = \int\limits_0^{2\pi} \left(f'(x)\right)^2 dx.$$

Ответ: $I_0 = \frac{\pi}{3}$, $I_1 = \frac{20\pi}{27}$. В силу равенсва Парсеваля, имеем:

$$I_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4^n} = \frac{\pi}{3},$$

$$I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi\, n^2}{4^n} = \frac{\pi}{\ln^2 4} \left(\frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-nx} \right) \Bigg|_{x=1}$$

Имеем:

$$\frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-nx} = \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{4^x - 1} = -\frac{d}{dx} \frac{4^x \ln 4}{(4^x - 1)^2} = -\frac{4^x \ln^2 4}{(4^x - 1)^2} + \frac{2 \cdot 4^{2x} \ln^2 4}{(4^x - 1)^3}$$

Отсюда

$$I_1 = \pi \left(-\frac{4}{9} + \frac{32}{27} \right) = \frac{20\pi}{27}.$$

Инструкция: доказана непрерывная дифференцируемость f — 1 очко, интеграл I_0 представлен числовым рядом по равенству Парсеваля — 1 очко, ряд для I_0 просуммирован — 1 очко, интеграл I_1 представлен числовым рядом по равенству Парсеваля — 1 очко, ряд для I_1 просуммирован — 2 очка

ОЧКИ	**ОЦЕНКА**
0–1	НЕУД. (1)
2–3	НЕУД. (2)
4–5	УДОВЛ. (3)
6–7	УДОВЛ. (4)
8–10	ХОР. (5)
11–13	ХОР. (6)
14–16	ХОР. (7)
17–19	ОТЛ. (8)
20–22	ОТЛ. (9)
23–25	ОТЛ. (10)